

## IMAGE INTERPOLATION USING OF THE FIFTH AND SEVENTH ORDER POLYNOMIAL PARAMETER KERNELS

Nataša Savić

Academy of Applied Technical and Preschool Studies, Niš, Serbia, natasa.savic@akademijanis.edu.rs

Zoran Milivojević

Academy of Applied Technical and Preschool Studies, Niš, Serbia,  
zoran.milivojevic@akademijanis.edu.rs

**Abstract:** In the first part of the paper, one-parameter (1P), fifth and seventh order polynomial interpolation convolution kernels, are described. In the second part of the paper an Experiment is described. The precision of the image interpolation was tested. Interpolation of the Test images from the base, using interpolation kernels, were performed. The precision of the interpolation kernels was measured using the mean squared error (MSE). Next, optimum kernel parameter,  $\alpha$ , were determined by minimizing MSE. After that, a comparative analysis of the minimum MSE values, for the fifth and seventh order polynomial kernels, was performed. The results are presented tabularly and graphically.

**Keywords:** digital image processing, convolution, interpolation, interpolation kernel, kernel parameter

## INTEROLACIJA SLIKE PARAMETARSKIM POLINOMIJALNIM JEZGRIMA PETOG I SEDMOG REDA

Nataša Savić

Akademija tehničko-vaspitačkih strukovnih studija, Niš, Srbija, natasa.savic@akademijanis.edu.rs

Zoran Milivojević

Akademija tehničko-vaspitačkih strukovnih studija, Niš, Srbija, zoran.milivojevic@akademijanis.edu.rs

**Sadržaj:** U prvom delu rada opisana su jedno-parametarska (1P) polinomijalna, interpolaciona konvoluciona jezgra, petog i sedmog reda. U drugom delu rada opisan je Eksperiment pomoću koga se testira preciznost interpolacije opisanih jezgara. Interpolirane su Test slike iz baze. Preciznost interpolacionih jezgara merena je pomoću srednje kvadratne greške (MSE). Određene su optimalne vrednosti parametra jezgara,  $\alpha$ , minimiziranjem MSE. Nakon toga, izvršena je komparativna analiza minimalnih vrednosti MSE za jezgra petog i sedmog reda. Rezultati su prikazani tabelarno i grafički.

**Ključne reči:** digitalno procesiranje slike, konvolucija, interpolacija, interpolaciono jezgro, kernel parametar.

### 1. UVOD

Kod procesiranja signala često je neophodno primeniti interpolaciju. Za rad u realnom vremenu najčešće se primenjuje konvoluciona interpolacija (Meijering et al., 2003), (Gajalakshmi et al., 2021) Konvoluciona interpolacija uniformno semplovanih podataka realizuje se primenom interpolacionog konvolucionog jezgra (Meijering et al., 2001). Po teoriji uzorkovanja *sinc* funkcija predstavlja idealno interpolaciono jezgro (Pratt, 1978).

Idealno interpolaciono jezgro  $r(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$  (*sinc* funkcija) zbog svoje beskonačne dužine je neostvarljivo. Zato je

razvijen veliki broj konvolucionih jezgara konačne dužine (Meijering et al., 1999). Najjednostavnija jezgra koja dobro aproksimiraju *sinc* funkciju su polinomijalna konvoluciona jezgra. Implementacijom različitih interpolacionih jezgra postiže se različita preciznost i efikasnost interpolacionih algoritama (Li et al, 2019). Izbor interpolacionog jezgra direktno utiče na brzinu izvršavanja interpolacionih algoritama i njihovu numeričku preciznost. Kako bi se minimizirala greška interpolacije i jezgro što bolje prilagodilo problematici, vrši se parametrizacija jezgra (Park et al., 1982). Kod primene konvolucione interpolacije često se koristi jednoparametarsko kubno interpolaciono jezgro koje je Keys opisao u radu (Keys 1981). Primenjuju se i parametarska polinomijalna jezgra čiji je red veći od 3 i manji od 10, kao i jezgra sa više parametara. U radovima (Milivojević et al, 2017), (Savić et al 2020) pokazano je da je kubno konvoluciono jezgro sa tri parametra preciznije u odnosu na 1P Keys jezgro. U radu (Savić et al 2022) pokazano je da je kod interpolacije audio signala primenom 1P jezgra sedmog reda povećana preciznost i tačnost interpolacije u odnosu na interpolaciju sa implementiranim 1P jezgro petog reda.

U ovom radu vršena je konvoluciona interpolacija sa implementiranim 1P jezgrom petog reda i 1P jezgrom sedmog reda kod interpolacije nekih test slika. Izračunavana je srednje kvadratna greška interpolacije kod test slika. Izvršena je komparativna analiza u odnosu na preciznost procene. Procena preciznosti utvrđena je na osnovu minimalne vrednosti srednje kvadratne greške interpolacije primenom 1P jezgra petog i 1P jezgra sedmog reda. Eksperimentalnim putem određeni su optimalni parametri 1P interpolacionog jezgara petog i 1P interpolacionog jezgra sedmog reda.

## 2. INTERPOLACIONA KONVOLUCIONA JEDNOPARAMETARSKA JEZGRA

### 2.1 Jednparametarsko (1P) interpolaciono jezgro petog reda

U radu (Meijering et al., 1999) definisano je 1P konvoluciono - interpolaciono jezgro petog reda, dužine  $L = 6$  sa:

$$r_5(x) = \begin{cases} \left(10\alpha - \frac{21}{16}\right)|x|^5 + \left(-18\alpha + \frac{45}{16}\right)|x|^4 + \left(8\alpha - \frac{5}{2}\right)|x|^2 + 1, & |x| \leq 1 \\ \left(11\alpha - \frac{5}{16}\right)|x|^5 - \left(88\alpha - \frac{45}{16}\right)|x|^4 + (270\alpha - 10)|x|^3 - \left(392\alpha - \frac{35}{2}\right)|x|^2 + (265\alpha - 15)|x| - (66\alpha - 5), & 1 < |x| \leq 2, \\ \alpha|x|^5 - 14\alpha|x|^4 + 78\alpha|x|^3 - 216\alpha|x|^2 + 297\alpha|x| - 162\alpha, & 2 < |x| \leq 3 \\ 0 & |x| > 3 \end{cases} \quad (1)$$

gde je  $\alpha$  parametar jezgra.

### 2.2 Jednparametarsko (1P) interpolaciono jezgro sedmog reda

Konvoluciono - interpolaciono jezgro sedmog reda, (Meijering et al., 1999) dužine  $L = 8$ , definisano je sa:

$$r_7(x) = \begin{cases} a_7|x|^7 + a_6|x|^6 + a_5|x|^5 + a_4|x|^4 + a_3|x|^3 + a_2|x|^2 + a_1|x| + a_0; & |x| \leq 1 \\ b_7|x|^7 + b_6|x|^6 + b_5|x|^5 + b_4|x|^4 + b_3|x|^3 + b_2|x|^2 + b_1|x| + b_0; & 1 < |x| \leq 2 \\ c_7|x|^7 + c_6|x|^6 + c_5|x|^5 + c_4|x|^4 + c_3|x|^3 + c_2|x|^2 + c_1|x| + c_0; & 2 < |x| \leq 3, \\ d_7|x|^7 + d_6|x|^6 + d_5|x|^5 + d_4|x|^4 + d_3|x|^3 + d_2|x|^2 + d_1|x| + d_0; & 3 < |x| \leq 4 \\ 0; & |x| > 4 \end{cases} \quad (2)$$

Koeficijenti jezgra su:

$$\begin{cases} a_0 = 1, & a_1 = 0, \\ a_2 = -384\alpha - \frac{1393}{578}, & a_3 = 0, \\ a_4 = 760\alpha + \frac{1960}{867}, & a_5 = 0, \\ a_6 = -621\alpha - \frac{1148}{867}, & a_7 = 245\alpha + \frac{821}{1734}. \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = -2352\alpha - \frac{2233}{1156}, & b_1 = 14168\alpha - \frac{120407}{6936}, \\ b_2 = -36000\alpha - \frac{13006}{289}, & b_3 = 47880\alpha + \frac{127575}{2312}, \\ b_4 = -35640\alpha - \frac{128695}{3468}, & b_5 = 14952\alpha + \frac{32683}{2312}, \\ b_6 = -3309\alpha - \frac{2492}{867}, & b_7 = 301\alpha + \frac{1687}{6936}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0 = -47280\alpha - \frac{8505}{1156}, & c_1 = 133336\alpha + \frac{42525}{2312}, \\ c_2 = -157632\alpha - \frac{5670}{289}, & c_3 = 101640\alpha + \frac{1575}{136}, \\ c_4 = -38720\alpha - \frac{4725}{1156}, & c_5 = 8736\alpha + \frac{1995}{2312}, \\ c_6 = -1083\alpha - \frac{175}{1734}, & c_7 = 57\alpha + \frac{35}{6936}. \end{cases} \quad \begin{cases} d_0 = -12288\alpha, & d_1 = 22528\alpha, \\ d_2 = -17664\alpha, & d_3 = 7680\alpha, \\ d_4 = -2000\alpha, & d_5 = 312\alpha, \\ d_6 = -27\alpha & d_7 = \alpha. \end{cases}$$

gde je  $\alpha$  parametar jezgra.

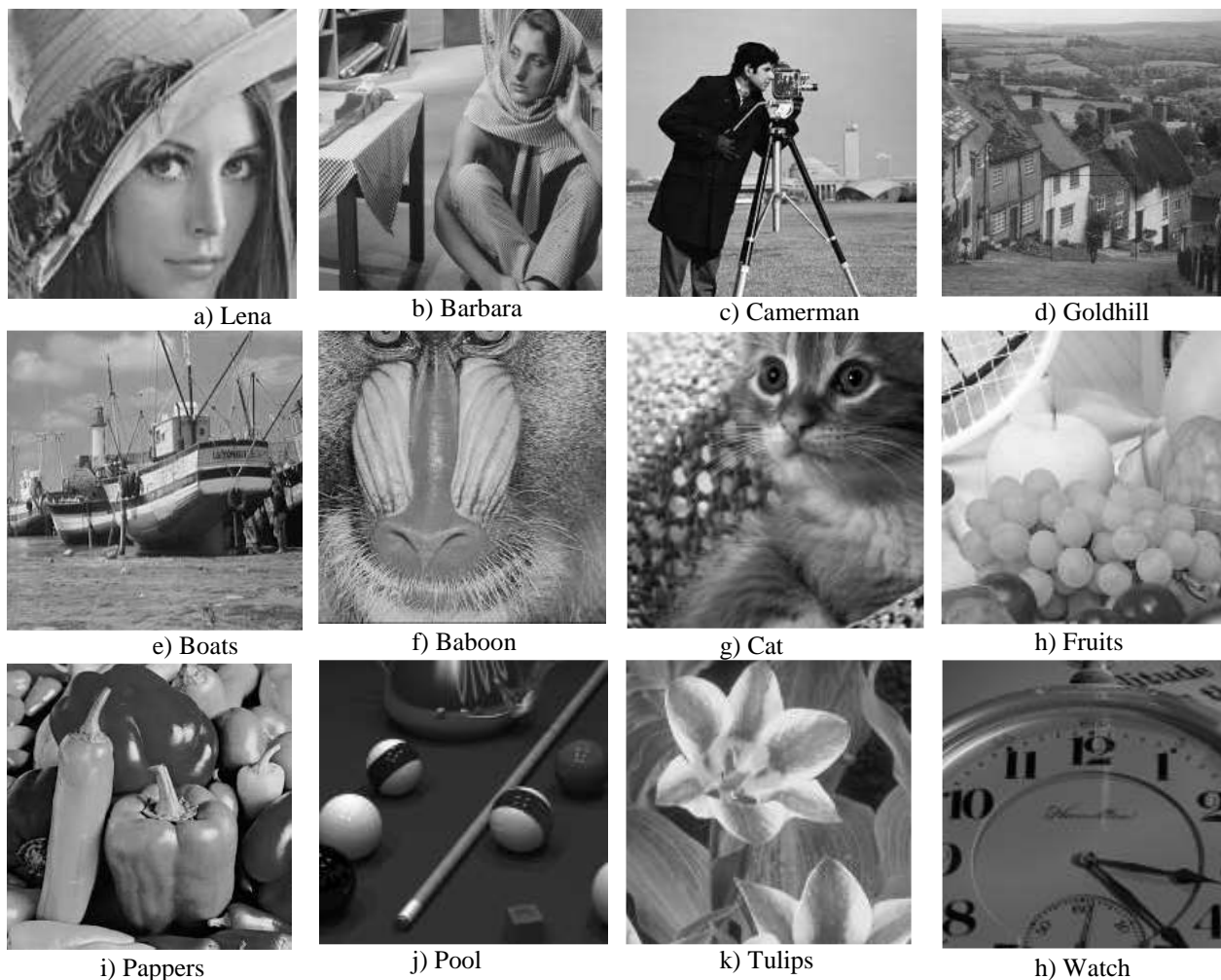
### 3. EKSPERIMENTALNI REZULTATI

#### 3.1 Eksperiment

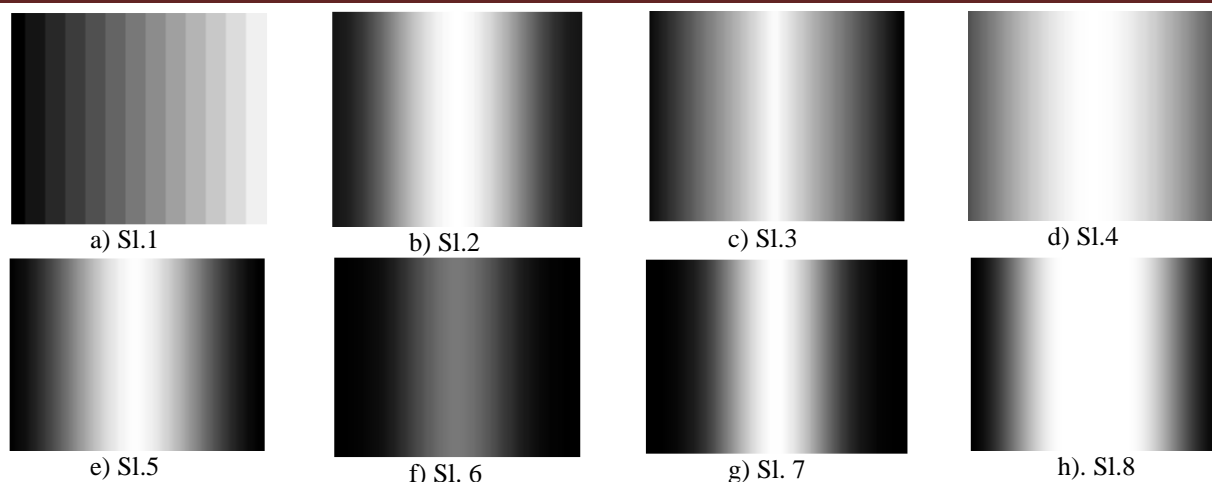
Eksperimentalnim putem određuje se optimalna vrednost parametra  $\alpha$  za slučaj interpolacije test slika,  $X$ , dimenzije  $M \times N$ , i određuje srednje kvadratna greška interpolacije. Eksperimentom se vrši izbor optimalnih parametara a)  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{12}\}$  za prirodne slike i b)  $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$ . Analizira se greška procene koja predstavlja razliku između tačne i interpolirane vrednosti, niza  $x_{M \times N}$  koji je formiran nadovezivanjem vrsta matrice  $X$ . Procena vrednosti  $i$ -te komponente niza realizuje se formiranjem  $i$ -tog bloka  $x_{Bi} = \{x_{i-L+1}, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{i+L-1}\}$  i primenom 1P konvolucionog jezgra petog i sedmog reda sa parametrima  $\alpha_k$ , za svako  $k=1, 2, \dots, K$ , gde je  $K=12$  za prirodne slike i  $K=8$  za veštačke slike. Određuje se greška interpolacije  $e = x_i - \hat{x}_i$  i izračunava MSE za svako  $\alpha_k$  i određuje  $\alpha_{opt} = \arg \min_{\alpha} (MSE)$ .

#### 3.2 Baza

Baza je sačinjena od a) prirodnih standardnih test slika: *Lena*, *Barbara*, *Camerman*, *Goldhill*, *Boats*, *Baboon*, *Cat*, *Fruits*, *Peppers*, *Pool*, *Tulips*, *Watch* i b) veštačkih slika. Prirodne test slike prikazane su na sl.1, a veštačke na sl.2.



Slika 1. Prirodne test slike



Slika 2. Veštačke test slike

### 3.3 Rezultati

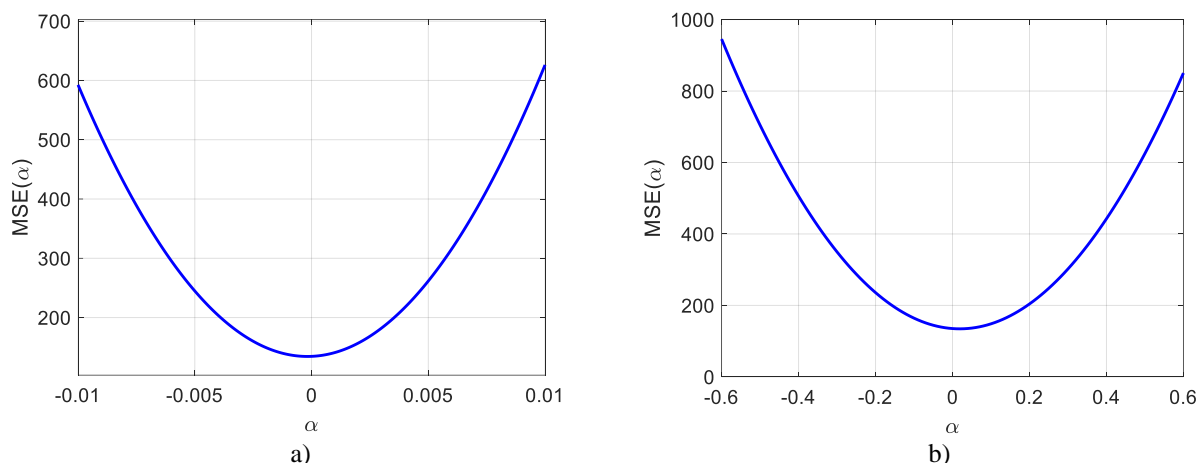
Primenom 1P jezgra petog reda i 1P jezgra sedmog reda kod interpolacije nekih test slika dobijeni su rezultati za optimalne vrednosti parametra jezgra ( $\alpha_{opt}$ ) i minimalne vrednosti MSE ( $MSE_{min}$ ) koji su prikazani u tabelama i na slikama. U tabeli 1 prikazani su rezultati za prirodne slike, a u tabeli 2 za veštački generisane slike. U svim tabelama prikazane su i srednje vrednosti optimalnih parametara i minimalnih vrednosti MSE.

Tabela 1. Minimalna srednje kvadratna greška za prirodne test slike

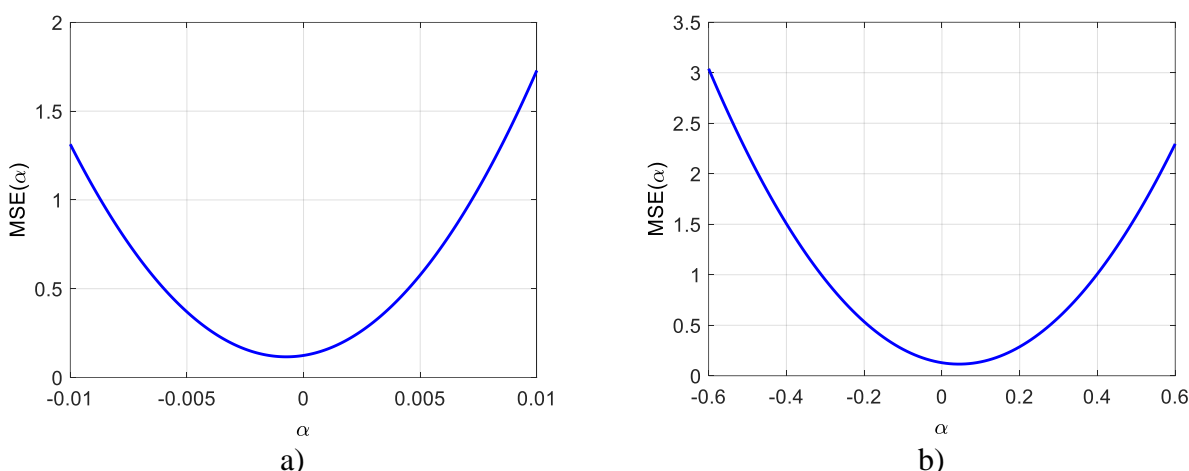
Slika	1P jezgro 5. reda		1P jezgro 7. reda	
	$\alpha_{opt}$	$MSE_{min}$	$\alpha_{opt}$	$MSE_{min}$
Lena	0.0500	114.5172	$-8.5304 \cdot 10^{-4}$	114.4321
Barbara	-0.0500	265.0352	0.0014	264.8121
Camerman	0.0100	572.2504	$-1.0000 \cdot 10^{-4}$	572.3069
Goldhill	0.0200	134.4573	$-2.0000 \cdot 10^{-4}$	134.4394
Boats	-0.0300	359.3078	0.0011	360.9105
Baboon	0.0200	180.4550	$1.4696 \cdot 10^{-4}$	181.0123
Cat	0.0500	73.5359	$-8.5304 \cdot 10^{-4}$	73.5295
Fruits	0.0100	36.6249	$1.0000 \cdot 10^{-4}$	36.6328
Pappers	0.0400	114.0118	$-8.5304 \cdot 10^{-4}$	114.0921
Pool	0.0400	33.8392	$-7.0000 \cdot 10^{-4}$	33.8279
Tulips	0.0600	61.6022	$-8.5304 \cdot 10^{-4}$	61.5693
Watch	0.0600	25.3594	$-8.5304 \cdot 10^{-4}$	25.3901
	$\alpha_{opt\_5\_red\_1P\_e}$	$MSE_{5\_red\_1P\_e}$	$\alpha_{opt\_7\_red\_1P\_e}$	$MSE_{7\_red\_1P\_e}$
	0.0233	164.2497	$-2.0985 \cdot 10^{-4}$	164.4129

Tabela 2. Minimalna srednje kvadratna greška za veštačke test slike

Veštačke slike	1P jezgro 5. reda		1P jezgro 7. reda	
	$\alpha_{opt}$	$MSE_{min}$	$\alpha_{opt}$	$MSE_{min}$
Sl. 1	-0.0100	302.7383	$4.0000 \cdot 10^{-4}$	305.5126
Sl. 2	-0.0013	0.1560	$4.0000 \cdot 10^{-4}$	0.1547
Sl. 3	0.0600	0.0516	-0.0011	0.0509
Sl. 4	0.0400	0.1156	$-7.0000 \cdot 10^{-4}$	0.1165
Sl. 5	0.0200	0.1128	$-3.0000 \cdot 10^{-4}$	0.1136
Sl. 6	0.0300	0.1366	$-5.0000 \cdot 10^{-4}$	0.1361
Sl. 7	-0.0100	0.1348	$6.0000 \cdot 10^{-4}$	0.1350
Sl. 8	0.0400	0.0803	$-7.0000 \cdot 10^{-4}$	0.0809
	$\alpha_{opt\_5\_red\_1P\_e}$	$MSE_{5\_red\_1P\_e}$	$\alpha_{opt\_7\_red\_1P\_e}$	$MSE_{7\_red\_1P\_e}$
	0.0211	37.9407	$-2.3750 \cdot 10^{-4}$	38.2875



Slika 3. Zavisnost MSE od parametra jezgra a) sedmog reda, b) petog reda kod test slike Goldhill



Slika 4. Zavisnost MSE od parametra jezgra a) sedmog reda, b) petog reda kod veštacke test sl.4.

#### 4. ANALIZA REZULTATA

Na osnovu eksperimentalnih rezultata prikazanih u tabeli 1 i tabeli 2 zaključuje se da:

a) kod prirodnih slika opseg optimalnih vrednosti parametra  $\alpha$  jezgra petog reda pripada intervalu  $[-0.05, 0.06]$ , a za jezgro sedmog reda je  $\alpha_{opt} \in (-0.0009, 0.0014]$ . Srednja vrednost parametra jezgra petog reda je  $\overline{\alpha_{opt\_5\_red\_1P\_e}} = 0.0233$ ,

a za jezgro sedmog reda  $\overline{\alpha_{opt\_7\_red\_1P\_e}} = -2.0985 \cdot 10^{-4}$ ,

b) kod veštackih slika opseg optimalnih vrednosti parametra  $\alpha$  jezgra petog reda pripada intervalu  $[-0.01, 0.06]$ , a za jezgro sedmog reda je  $\alpha_{opt} \in [-0.0011, 0.0006]$ . Srednja vrednost parametra jezgra petog reda je  $\overline{\alpha_{opt\_5\_red\_1P\_e}} =$

$0.0211$ , a za jezgro sedmog reda  $\overline{\alpha_{opt\_7\_red\_1P\_e}} = -2.3750 \cdot 10^{-4}$ ,

c) kod prirodnih slika srednja kvadratna greška kod 1P interpolacionog jezgra sedmog reda u odnosu na srednje kvadratnu grešku 1P jezgra petog reda je  $MSE_{7\_red} / MSE_{5\_red} = 164.4129 / 164.2497 = 1.001$  puta veća,

d) kod veštackih slika srednja kvadratna greška kod 1P interpolacionog jezgra sedmog reda u odnosu na srednje kvadratnu grešku 1P jezgra petog reda je  $MSE_{7\_red} / MSE_{5\_red} = 38.2875 / 37.9407 = 1.0091$  puta veća.

Na osnovu komparativne analize rezultata srednje kvadratne greške za 1P interpolaciono jezgro petog reda i 1P interpolaciono jezgro sedmog reda, zaključuje se da je 1P jezgro petog reda preciznije u odnosu na 1P jezgro sedmog reda. Obzirom na veću numeričku složenost 1P jezgra sedmog reda u odnosu na 1P jezgro petog reda, prednost kod interpolacije slike ima 1P jezgro petog reda.

## 5. ZAKLJUČAK

U radu je izvršena komparativna analiza preciznosti interpolacije kod slike primenom 1P intepolacionog jezgra petog i sedmog reda. Za razliku od interpolacije kod audio signala gde je jezgro sedmog reda pokazalo znatno veću preciznost u odnosu na jezgro petog reda, kod interpolacije slike jezgro sedmog reda pokazalo je manju preciznost. Takođe, na osnovu numeričke složenosti 1P jezgro petog reda pogodnije je za primenu za rad u realnom vremenu u odnosu na 1P jezgro sedmog reda.

## REFERENCES

- Gajalakshmi, N., & Karunanithi, S. (2021). Cubic Convolution and Osculatory Interpolation for Image Analysis, *International Journal of Creative Research Thoughts (IJCRT)*, 9 (12), 836 – 841.
- Keys, R. (1981). Cubic convolution interpolation for digital image processing, *IEEE Trans. Acout. Speech, & Signal Processing*, vol. ASSP-29, 1153-1160.
- Li, Y. Qi, F., & Wan, Y. (2019). Improvements On Bicubic Image Interpolation, *IEEE 4th Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC)*, 1316 – 1320.
- Meijering, E., & Unser, M. (2003). A Note on Cubic Convolution Interpolation, *IEEE Transactions on Image Processing*, 12 (4), 447-479.
- Meijering, E., Niessen, W., & Max, A. (2001). Viergever, Quantitative Evaluation of Convolution-Based Methods for Medical Image Interpolation, *Medical Image Analysis*, 5( 2), 111-126
- Meijering, E., Zuiderveld, K., & Viergever, M. (1999). Image Reconstruction by Convolution with Symmetrical Piecewise nth-Order Polynomial Kernels, *IEEE Transactions on Image Processing*, 8( 2), 192-201.
- Milivojević, Z., Savić, N., & Brodić, D. (2017). Three-parametric cubic interpolation for estimating the fundamental frequency of the speech signal, *Computing and Informatics*, 36 (2), 449-469.
- Park, K. S., & Schowengerdt, R. A. (1982). Image reconstruction by parametric cubic convolution, *Computer Vision, Graphics & Image Processing*, 23, 258-272.
- Pratt, W.K. (1978). *Digital image processing*, Wiley, New York
- Savić, N., & Milivojević, Z. (2020). Optimization of the 3P Keys Kernel Parameters for Interpolacion of Audio Signals, *International Scientific Conference UNITECH'20*, (pp. 200 – 205), Gabrovo, Bulgaria.
- Savić, N., Milivojević, Z., Prlinčević, B., & Kostić, D. (2022). Septic-convolution Kernel - Comparative Analysis of the Interpolation Error, *16th International Conference on DEVELOPMENT AND APPLICATION SYSTEMS*, Suceava, Romania.