
MATHEMATICAL AND BOND GRAPH MODEL OF FORCED OSCILLATIONS

Dragana Trajkovic

Academy of Technical Educational-Vocational Studies Vranje, Republic of Serbia,
dragana.trajkovic@akademijanis.edu.rs

Slobodan Stefanovic

Academy of Technical Educational-Vocational Studies Vranje, Republic of Serbia,
slobodan.stefanovic@akademijanis.edu.rs

Abstract: Matter is exchanged through material channels, while energy channels form paths for the exchange of energy (mechanical, electrical, thermal, chemical, etc.). Information channels are mediums for the transmission of signals. Technological recognition and design of the technological process are carried out through modeling. Modeling is used when applying mathematics to the study of nature. That is the basic research method of modern science, which boils down to the compilation and constant improvement of models of studied phenomena and systems. Modeling is based on the fact that certain phenomena are easily recognized and monitored on another system that is analogous to it. An analysis of the second-order self-excited system originating from noise was performed using the bond graph. A mathematical model that describes the dynamics of self-excited oscillation and a bond graph model that graphically solves the modeling problem are presented. Studying self-excited oscillations is a difficult task due to the occurrence of vibrations. Self-excited oscillations, which include noise, are frequently present in everyday life, not only in engineering practice, what is danger to human health. That is why it is necessary to reduce the amplitude of these oscillations. Solving this problem boils down to the introduction of external harmonics or absorbers. A self-exciting system is undesirable, it is necessary to measure oscillations, which is most often read by the static force of friction and slippage, as well as the phase speed of friction. Quasi-harmonic oscillations are sinusoidal in the slip phase and it is necessary to limit their value. Bond graph models are used to simulate models of various physical systems (electrical, mechanical, hydraulic system, etc.) and their combinations (electromechanical, mechanical-hydraulic system, etc.). Bond graphs are based on the exchange of energy through ports θ and I . Effort, labeled e represents physical quantities: force, voltage, pressure, etc.. Flow, labeled f represents current, speed, volume. All these physical quantities are used to analyze the physical model and description for the bond graph model, which is a powerful tool for modeling engineering systems, especially when physical domains are involved. Each connection is with labeled and directed graphs. The Bond graph model can be decomposed into sub-models, the arrows represent the direction of energy or flow from ports θ or I . It is possible to automatically reduce the bad features of the model by analyzing the prediction. Model simulations can be obtained in several ways, using Matlab/Simulink models or Dymole with the Modelica library, which contains Bond graph elements for obtaining output, speed and other quantities.

Keywords: Mathematical model, forced oscillation, simulations, bond graph model.

MATEMATIČKI I BOND GRAF MODEL PRINUDNIH OSCILACIJA

Dragana Trajković

Akademija tehničko – vaspitačkih strukovnih studija – Odsek Vranje, Srbija,
dragana.trajkovic@akademijanis.edu.rs

Slobodan Stefanović

Akademija tehničko – vaspitačkih strukovnih studija – Odsek Vranje, Srbija,
slobodan.stefanovic@akademijanis.edu.rs

Abstract: Preko materijalnih kanala vrši se razmena materije, dok energetske kanali čine puteve za razmenu određene energije (mehaničke, električne, toplotne, hemijske, itd.). Informacioni kanali su sredine za prenos signala. Modelovanjem se vrši tehnološko prepoznavanje i projektovanje tehnološkog procesa. Modelovanju se pribegava uvek kada se radi o primeni matematike na izučavanje prirode. To je osnovni istraživački metod savremene nauke koji se svodi na sastavljanje i stalno usavršavanje modela izučavanih pojava i sistema. Modelovanje je zasnovano na činjenici da određene pojave lako prepoznaju i prate na drugom sistemu koji je njemu analogan. Izvršena je analiza samopobudnog sistema drugog reda koji potiče od buke primenom bond grafa. Prikazan je matematički model koji opisuje dinamiku samopobudne oscilacije i bond graf model koji grafički rešava problem modelovanja. Izučavanje samopobudnih oscilacija je zbog pojave vibracija težak posao. Samopobudne oscilacije među kojima spada buka su

frekventno prisutne u svakodnevnom životu, ne samo u inženjerskoj praksi, što predstavlja opasnost za ljudsko zdravlje. Zato je neophodno redukovati amplitude tih oscilacija. Rešavanje ovog problema svodi se na uvođenje spoljašnjih harmonika ili absorbera. S obzirom da je samopobudni sistem nepoželjan, potrebno je meriti oscilacije, što se najčešće očitava statičkom silom trenja i proklizavanja, kao i faznom brzinom trenja. Kvazi harmonijske oscilacije su sinusoidnog oblika u fazi proklizavanja i neophodno je ograničiti njihovu vrednost. Bond graf modeli se koriste za simulaciju modela raznih fizičkih sistema (električni, mehanički, hidraulički sistem, itd.) i njihovih kombinacija (elektromehnički, mehaničko-hidraulički sistem, itd.). Bond grafovi se zasnivaju na razmeni energije preko portova θ i I . Napor, sa oznakom e predstavlja fizičke veličine: silu, napon, pritisak, itd.. Protok, sa oznakom f predstavlja struju, brzinu, zapreminu. Sve ove fizičke veličine koriste se za analizu fizičkog modela i opisa za bond graf modelovaje, koji je moćan alat za modeliranje inženjerskih sistema, posebno kada su uključeni fizički domeni. Svaka veza je sa označenim i usmerenim grafovima. Bond graf model se može razložiti na podmodele, strelice predstavljaju smer kretanja energije ili protoka od portova θ ili I . Analizom predikcije, moguće je automatski smanjiti loše karakteristike modela. Simulacije modela mogu biti dobijene na više načina, korišćenjem Matlab/Simulink modela ili Dymole sa Modelica bibliotekom koja u sebi sadrži Bond graf elemente za dobijanje izlaza, brzine i ostalih veličina.

Ključne reči: Matematički model, samopobudne oscilacije, simulacije, bond graf model.

1. MATEMATIČKI MODEL

Oscilator osciluje pomoću samopobudne periodične sile F_p i predstavlja prinudnu oscilaciju koja se često sreće u praksi. Restituciona sila koja se javlja je:

$$F = F_p - kx - F_{tr} \quad (1)$$

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

$$F_{tr} = \mu \frac{dx}{dt} \quad (3)$$

Gde je:

F - restituciona sila, proizvod mase i ubrzanja,

F_p - nelinearna samopobudna sila,

x - rastojanje od ravnotežnog položaja,

F_{tr} - sila trenja, proporcionalna brzini kretanja tela,

m - masa tela koje osciluje,

μ - koeficijent trenja.

Zamenom u jednačini (1) dobija se:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_p - kx - \mu \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = F_p \quad (5)$$

Periodična sila je sa amplitudom F_0 , sa kružnom frekvencom ω i menja se po sinusnom pravilu:

$$F_p = F_0 \sin(\omega t + \theta) \quad (6)$$

Zamenom u jednačinu (5) dobija se nehomogena diferencijana jednačina:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin(\omega t + \theta) \quad (7)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2h \frac{dx_1}{dt} + a^2 x_1 = F_1 \sin(\omega t + \theta) \quad (8)$$

Pri čemu je:

$$h = \frac{\mu}{2m}, a^2 = \frac{k}{m}, F_1 = \frac{F_0}{m} \quad (9)$$

Rešavanjem kvadratne jednačine (8) dobijaju se:

$$x_2 = C_1 e^{-ht} \left(\sin pt + \frac{C_2}{C_1} \cos pt \right)$$

(10)

Sa proizvoljnim konstantama C_1, C_2 .

Vektor ulaza je: $u = [F_1 \sin(\omega t + \theta)]$, dok je izlaz $y = [x_2]$

$$m\dot{x}_2 = F_0 \sin(\omega t + \theta) - x_1 - kx_2 - \mu \frac{dx}{dt} \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m} \left(u_1 - x_1 - kx_2 - \mu \frac{dx_2}{dt} \right) \quad (12)$$

Sistem jednačina u matematičkoj formi ima oblik:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

(13)

$$y = C^T x$$

(14)

$$A = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -1 & -\mu \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

2. BOND GRAF MODEL

Priroda bond grafova je grafička, tj. postoji veza između grafičkog i matematičkog modelovanja. Proračunska struktura ostaje sakrivna unutar bond grafa, u obliku relacija bond grafa. Kao pomoćno sredstvo koristi se graf toka signala. Putevi naprezanja i protoka postaju vidljivi, a potpuno poznavanje matematičkih jednačina nebitno.

1. Prvi korak je određivanje kauzalnosti.
2. Drugi uspostavljanje grafa toka signala, sve veze se proširuju u bilateralne tokove signal prema dodeljenoj uzročnosti,
3. Konstitutivni odnosi svakog čvora su upisani u obliku blok dijagrama, u skladu sa dodeljenom kauzalnošu porta:

$$I: e_4 = e_1 + e_2 - e_3 \quad (16)$$

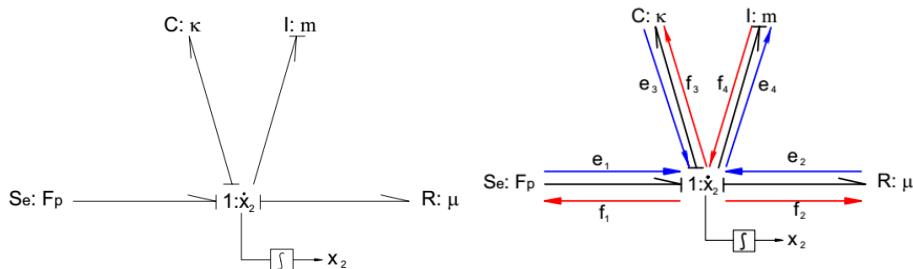
$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 \quad (17)$$

$$e_3 = \dot{x}_1 = kx_2 \quad (18)$$

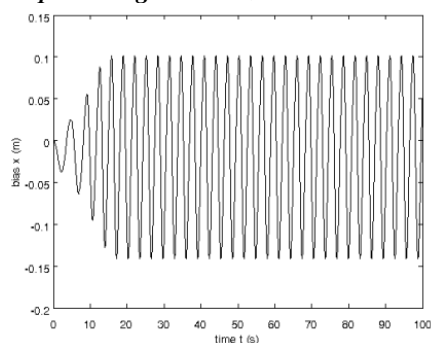
$$\dot{f}_4 = \dot{x}_2 = \frac{1}{m} e_4 \quad (19)$$

Na slici 1 prikazan je bond graf model samopobudnog sistema:

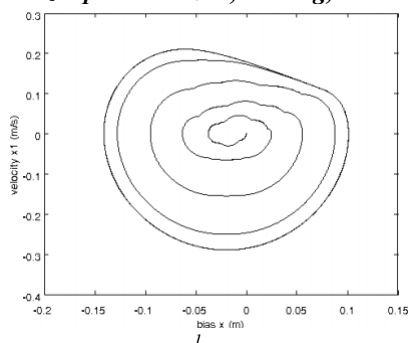
Slika 1: Bond graf samopobudnog sistema i bilateralni signal protoka između portova i definicija kauzaliteta



Slika 2: Rezultati simulacije samopobudnog sistema za vrednosti sistema $U_0=0$, $m=4$ kg, $C=0,03$ mN⁻¹

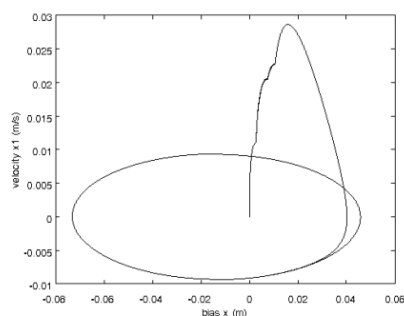


Slika 3: Fazni portret: $U_0=0$, $m=4$ kg, $C=0.03$ mN⁻¹



Oscilatorno kretanje se sastoji od sopstvenog kretanja i prinudnog kretanja. Iz faznog dijagrama vidi se da e^{-ht} teži nuli kad $t \rightarrow +\infty$.

Slika 4: Fazni portret: $U_0=1.5$ N, $m=4$ kg, $C=0.03$ mN⁻¹, $\Omega=\pi*0.05$ rad/s



3. ZAKLJUČAK

Prikazan je model samopobudnog mehaničkog sistema drugog reda primenom bond-grafova. Za razliku od klasičnog modela u prostoru stanja, kod bond graf modelovanja nije neophodno poznavati diferencijalne jednačine. Simulacije dobijene bond graf modelom pokazuju dejstvo samopobudne sile sa sinusnim ulazom. Izlaz x_2 ima izgled sinusoide, dok fazni dijagram pokazuje težnju sistema da se umiri i izjednači sa nulom. Primenom simulacionog softverskog paketa *DYMOLE* koja koristi biblioteku *MODELICA*, dobijamo izgled funkcije izlaza, fazni dijagram, kao i mogućnost predikcije i upravljanja procesima.

REFERENCE

- Boum, A.T., & Djesseub, T. (2020). Modeling, Simulation and Fault Diagnosis of a Doubly Fed Induction Generator using Bond Graph. *International Journal of Control Systems and Robotics*, pp 34-40 ISSN: 2367-8917, Volume 5 (<http://www.ijaras.org/ijaras/journals/ijcsr>)
- Ibănescu, R., & Ibănescu, M. (2021). A Method to Find the Differential Equations from the Bond Graph Containing Inertial Elements in Derivative Causality. *Bulletin of the Polytechnic Institute of Iași. Machine constructions Section*, Volume & Issue: Volume 67 (2021) - Issue 4, pp-35-44

- Mati'as A Nacusse and Sergio J Junco, (2016). Generalized controlled switched bond graph junctions, *Systems and Control Engineering* 1–16 IMechE 2015 Reprints and permissions: sagepub.co.uk/journalsPermissions.nav
DOI: 10.1177/0959651815583593
- Poštovei, D. A., Bulac, C., Triștiu, I., & Camachi, B. (2020). The evolution and challenges of modern Distributed Control Systems. *IEEE 14th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics (SACI)*, Timisoara, Romania, 2020, pp. 000089-000094, doi: 10.1109/SACI49304.2020.9118829.
- Stevanović, D., Savić, M., & Jovanović, J. (2017). Računarska podrška projektovanju tehnoloških procesa. 25. međunarodni kongres o procesnoj industriji, Inovacioni centar Tehnološko-metalurškog fakulteta, Univerziteta u Beogradu Karnegijeva 4
- Sujay, K. D., Arindam, M., & Prasanta, S. (2023). Design and implementation of fractional-order controller in delta domain. *Facta universitatis, electronics and energetic*, [Vol 36, No 2](#), pp-189-208.
- Trajković, D., Nikolić, V., Antić, D., Nikolić, S., & Perić, S. (2013). Application of the Hybrid Bond Graphs and Orthogonal Rational Filters in Sag Voltage Effect Reduction. *Electronics and Electrical Engineering*, vol. 19, no. 6, pp. 25-30. Print ISSN: 1392-1215, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.19.6.1746>), Publisher: Kaunas University of Technology,
- Trajković, D., & Dimitrijević, B. (2017). Hybrid bond graph of the robot's arm. *Knowledge International Journal* 20 (5) Bansko, 2311-2317,
- Trajković, D., & Dimitrijević, B. (2018). Bond graph model of the submersible pump. *Knowledge International Journal* 28 (4), 1335-1339,
- Trajković, D., Nikolić, V., Antić, D., Nikolić, S., & Perić, S. (2013). Application of the Hybrid Bond Graphs and Orthogonal Rational Filters in Sag Voltage Effect Reduction. *Electronics and Electrical Engineering*, vol. 19, no. 6, (2013), pp. 25-30. ISSN: 1392-1215, (Doi No: <http://dx.doi.org/10.5755/j01.eee.19.6.1746>) Publisher: Kaunas University of Technology,