VOLUME AND DILATION IN THE NORMAL ROAD WINDOWS IN AXIAL WAY

Slobodan Stefanovic
College of Applied Professional Studies, Vranje, Serbia, slobodanstef@gmail.com
Zoran Janjić
College of Applied Professional Studies, Vranje, Serbia,

Abstract: If a structural element, in this case the rod, loaded by a reduction in the focus section poprečenog optrerećenje limited to axial forces, then we say that the element is exposed to stress aksionalnom. In this case askijalna force may be the resultant of force systems whose direction coincides with the axis of the rod and at the same time it is called elongation or compression axial load.
Keywords: voltage, dilatation, rod.

NAPONI I DILATACIJE U NORMALNOM POPREČNOM PRESEKU ŠTAPA PRI AKSIJALNOM NAPREZANJU

Slobodan Stefanovic
College of Applied Professional Studies, Vranje, Serbia, slobodanstef@gmail.com
Zoran Janjić
College of Applied Professional Studies, Vranje, Serbia,

Rezime: Ako je neki konstruktivni element, u ovom slučaju štap, opterećen tako da se redukcijom na težište poprečenog preseka optrerećenje svodi samo na aksijalne sile, onda kažemo da je taj element izložen **aksionalnom naprezanju**. U ovom slučaju askijalna sila može biti i rezultanta sistema sila čiji se pravac poklapa sa pravcem ose štapa i pri tome ga izduženje ili sabijanje naziva aksijalnim opterećenjem.
Kjučne reči: napon, dilatacija, štap.

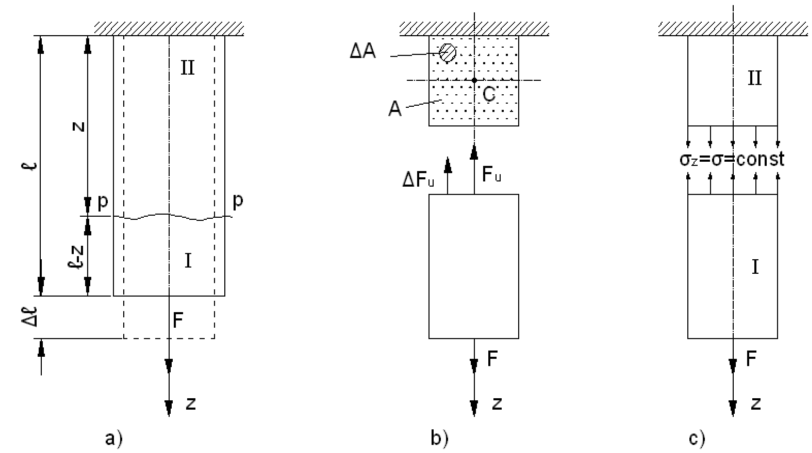
1. UVOD

Da bi se našao zakon promene normalnog napona po poprečnom preseku štapa, posmatrajmo štap konstantnog kvadratnog poprečnog preseka veličine A opterećen aksijalnom zateznom silom F_z.

Usled aksijalne sile F u bilo kom poprečnom preseku štapa javljaju se odgovarajuće sile. Zamislimo da smo štap presekli presekom p-p i da smo odstranili njegov gornji deo (deo II). Da bi donji deo štapa (deo I) ostao u ravnoteži odstranjeni deo treba zameniti odgovarajućim unutrašnjim silama po poprečnom preseku. Na elementarnoj površini preseka ΔA deluje elementarna unutrašnja sila ΔF_u.

Rezultanta unutrašnje sile F_u u bilo kom poprečnom preseku štapa mora biti u ravnoteži sa aksionalnom silom F.

Prema Bernulijevoj hipotezi (slika 1.c) o očuvanju ravnog poprečnog preseka pre i posle deformacije, poprečni preseci ostaju ravni i upravni na osu štapa pa je normalni napon ravnomerno raspoređen po poprečnom preseku te je $\sigma_z = \sigma = const.$



Slika 1. Štap konstantnog kvadratnog poprečnog preseka veličine A opterećen aksijalnom zateznom silom F_z

Iz uslova ravnoteže, dolazi se do sledeće relacije da je unutrašnja sile Fu:

$$F_u = \int_A \sigma_z dA = F, \text{odnosno} \quad \sigma = \frac{F}{A}. \qquad \textbf{(1)}$$

Izraz (1) služi za izračunavanje normalnog napona pri aksijalnom naprezanju, bilo da je reč o zatezanju ili o pritisku.

2. DEFORMACIJA PRI AKSIJALNOM NAPREZANJU - HUKOV ZAKON

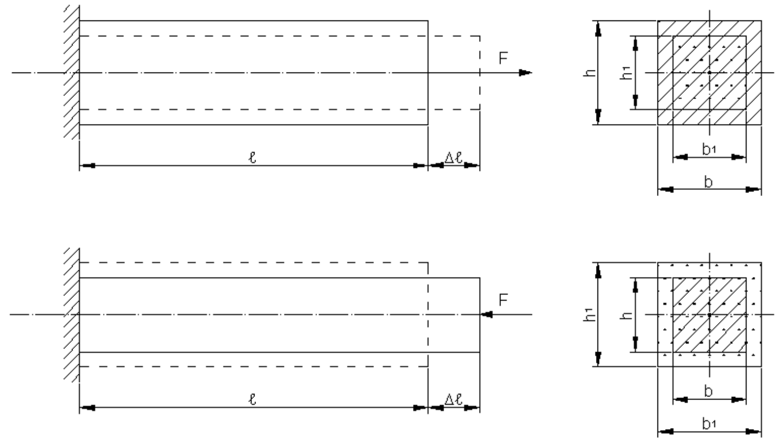
Ako je štap dužine l (slika 2.), kao u ovom slučaju, konstantnog poprečnog preseka, a opterećen je aksijalnom zateznom silom, u tom slučaju promeniće se dužina i promeniće mu se poprečni presek. Kod ovog načina opterećenja tj. (opterećenje na zatezanje) dolazi do deformacije štapa tako da se njegova dužina povećava za $\Delta l,$ i ova deformacija se naziva izduženje štapa, u suprotnom ako je štap izložen pritisnoj sili onda dolazi do njegovog skraćenja, takođe za $\Delta l,$ pa se ova deformacija naziva skraćenje štapa.

U oba ova slučaja i kod zatezanja i kod pritiska deformacija se ogleda u **promeni dužine štapa.** Veličina deformacije zavisi od intenziteta aksijalne sile F tako što po apsolutnoj vrednosti ona raste sa porastom intenziteta sile. Odnos izduženja (skraćenje) prema prvobitnoj dužini naziva se **dilatacijom** i obeležava se:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \qquad \textbf{(2)}$$

Za većinu konstrukcionih materijala i to primenom velikog broja eksperimenata, engleski naučnik Robert Huk je utvrdio zavisnost između napona i deformacije koji je izrazio na sledećom jednakošću:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon. \qquad \textbf{(3)}$$



Slika 2. Promena dužine i poprečnog preseka štapa kvadratnog oblika pri aksijalnom naprezanju

Po njemu, ovaj zakon se naziva i zakon proporcionalnosti, tj. naponi su proporcionalni deformacijama (Hukov zakon).

Koeficijent proporcionalnosti E naziva se **modulom elastičnosti** ili **Jangov modul** i predstavlja fizičku karakteristiku materijala.

Modul elastičnosti je karakteristika krutosti materijala, odnosno modul elastičnosti iskazuje sposobnost pružanja otpora materijala elastičnim deformacijama. U tabeli 1. Prikazane su vrednosti modula elastičnosti za najčešće korišćene materijale u mašinogradnji i građevinarstvu.

Tabela 1.

MATERIJAL	VREDNOST MODULA ELASTIČNOSTI - E
Liveno gvožđe	$(1{,}15 \div 1{,}6) \cdot 10^{11} Pa$
Ugljenični čelik	$(2 \div 2{,}1) \cdot 10^{11} Pa$
Legirani čelik	$(2{,}1 \div 2{,}2) \cdot 10^{11} Pa$
Bakar	$(0{,}84 \div 1{,}3) \cdot 10^{11} Pa$
Bronza	$(1{,}05 \div 1{,}15) \cdot 10^{11} Pa$
Aluminijum	$(0{,}7 \div 0{,}71) \cdot 10^{11} Pa$
Staklo	$0{,}56 \cdot 10^{11} Pa$
Beton	$(0{,}15 \div 0{,}4) \cdot 10^{11} Pa$

Obzirom na već prikazane relacije da je: $\sigma = \frac{F}{A}$ i $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, Hukov zakon se može napisati u obliku:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}. \tag{4}$$

Pored dužine pri aksijalnom naprezanju dolazi i do promene poprečnog preseka štapa. Pri istezanju poprečni presek štapa se smanjuje dok se pri pritisku on povećava. Odnos promenljivih poprečnih dimenzija prema prvobitnim poprečnim dimenzijama štapa naziva se poprečnom dilatacijom ili kontrakcijom i izražava se:

$$\varepsilon_p = \frac{b_1 - b}{b} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{h_1 - h}{h} = \frac{\Delta h}{h}. \qquad \textbf{(5)}$$

Francuski matematičar Poason dao je zavisnost između poprečnih i uzdužnih dilatacija i taj odnos izrazio kroz jednakost:

$$\varepsilon_p = -\mu \cdot \varepsilon. \qquad \textbf{(6)}$$

Vrednost koeficijenata proporcionanosti μ nazivamo Poasonovim koeficijentom i on zavisi od vrste materijala i kreće se u granicama od (0< μ < 0,5).
U prethodnom izrazu znak manje < nam pokazuje da se pri izduženju u jednom pravcu javlja skraćenje a u drugom pravcu izduženje. Pri izduženju štapa dolazi i do promene njegove zapremine jer se menja i dužina i poprečni presek štapa.

Zapremina pre deformacije štapa je: $V = b \cdot h \cdot l$ a posle deformacije iznosi:

$$V_1 = l_1 \cdot b_1 \cdot h_1 = b \cdot h \cdot l(1-\varepsilon)(1-\mu \cdot \varepsilon)^2$$

jer su dimenzije štapa posle deformacije:

$$l_1 = l + \Delta l = l + \varepsilon l = l(1+\varepsilon),$$

$$b_1 = b + \Delta b = b + \varepsilon_p \cdot b = b - \mu \cdot \varepsilon \cdot b = b(1-\mu \cdot \varepsilon)$$

$$h_1 = h + \Delta h = h + \varepsilon_p \cdot h = h - \mu \cdot \varepsilon \cdot h = h(1-\mu \cdot \varepsilon)$$

Priraštaj zapremine onda iznosi:

$$\Delta V = V - V_1 = b \cdot h \cdot l - b \cdot h \cdot l(1-\varepsilon)(1-\mu \cdot \varepsilon)^2.$$

Sređivanjem prethodnog izraza i zanemarivanjem manjih vrednosti višeg reda dobija se odnos:

$$\Delta V = V(1-2\mu)\varepsilon.$$

Relativna promena zapremine štapa ili **zapreminska dilatacija** jednaka je:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = (1-2\mu)\varepsilon. \qquad \textbf{(7)}$$

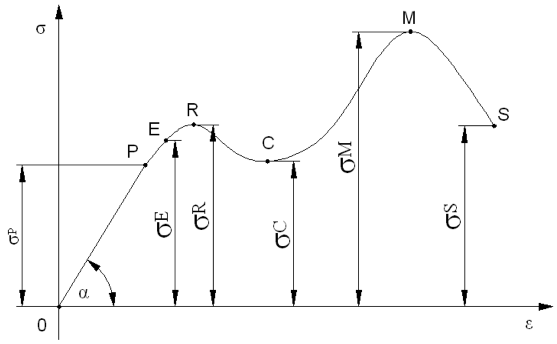
Pošto zapreminska dilatacija štapa pri zatezanju može biti samo pozitivna veličina, to mora biti ispunjen uslov da je (1-2 μ) veće od nule, pa se vrednost Poasonovog koeficijenta kreće u granicama (0< μ < 0,5).

3. MEHANIČKE KARAKTERISTIKE MATERIJALA (DIJAGRAMSKI NAPON – DILATACIJA ($\sigma - \varepsilon$))

Da bi neka konstrukcija, u eksploatacionim uslovima vršila svoju funkciju, njeni elementi moraju biti izrađeni od odgovarajućeg materijala. Zbog toga, za materijale koji se koriste u konstrukcijama moraju biti poznata njihova **mehanička svojstva** (čvrstoća, tvrdoća, plastičnost, elastičnost, itd.). Podaci o mehaničkim karakteristikama materijala dobijaju se eksperimentalnim putem, na specijalnim mašinama za mehaničko ispitivanje materijala. Ispitivanja se obavljaju na posebno pripremljenim uzorcima materijala – **epruvetama za ispitivanje materijala**.

Među ovim ispitivanjima značajno mesto ima **ispitivanje na zatezanje.** Ovo ispitivanje obavlja se na specijalnim mašinama za kidanje – kidalicama. Epruveta za ispitivanje izlaže se postepeno rastućem naprezanju na zatezanje, sve dotle dok ne nastupi kidanje. Za to vreme, na posebnom dijagramu, registruje se zavisnost deformacije Δl od intenzizeta zatezne sile F (dijagram sila – izduženje). Za praktičnu primenu koristi se dijagram koji daje zavisnost između normalnog napona σ i dilatacije ε, a zove se dijagram **napon – dilatacija** (σ , ε).

Ovaj dijagram, za meki čelik, prikazan je na slici (sl. 3.) i na njemu se mogu uočiti neke karakteristične oblasti. Od tačke O do P dijagram ima oblik prave linije, što znači da između napona i dilatacije postoji **proporcionalnost**.



Sl. 3. Dijagram napon - dilatacija

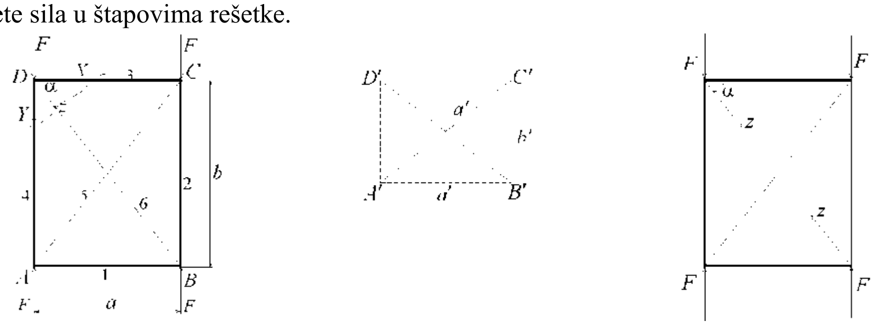
Tačka P na dijagramu je **granica proporcionalnosti,** a napon u njoj σ_P **napon na granici proporcionalnosti**. Znači, sve dotle dok napon ne dostigne vrednost napona na granici proporcionalnosti, važi Hukov zakon. Ako bi smo u tom trenutku epruvetu rasteretili, deformacije bi potpuno nestale, epruveta bi se vratila u svoje prvobitno stanje. Daljim povećanjem napona iznad granice proporcionalnosti, prestaje linearna zavisnost između napona i deformacije, ali deformacije ostaju elastične (po prestanku dejstva sile iščezavaju). Tačka E na dijagramu zove se **granica elestičnosti**, a napon σ_E **napon na granici elastičnosti**. Od tačke E do R deformacije sve brže rastu i nisu više elastične, jer po prestanku dejstva sile epruveta ostaje izdužena. Tačka R zove se **početak razvlačenja** (**velikih izduženja**), a napon σ_R **napon na gornjoj granici razvlačenja**. Pri daljem opterećenju epruvete, materijal naglo popušta i razvlači se čak i sa opadanjem napona, sve do tačke C. Tačka C predstavlja **završetak** (**granicu**) **razvlačenja**, a napon σ_C **napon na donjoj granici razvlačenja**. Od tačke C dolazi do takozvanog očvršćavanja materijala i napon se naglo povećava, svoju najveću vrednost dostiže u tački M, posle čega uz izvesno smanjenje napona dolazi do kidanja epruvete. Tačka M na dijagramu zove se **jačina materijala pri kidanju**, a napon σ_M **zatezna čvrstoća materijala**. Napon koji odgovara tački S je **napon kidanja** σ_S.

Dijagram napon – dilatacija (σ, ε), za različite materijale ima različit oblik. Kod nekih materijala oblast razvlačenja ne postoji, kod drugih nema proporcionalnosti između napona i dilatacije, kod trećih prekid materijala nastaje pri vrlo malim izduženjima itd. Znači, svakom materijalu odgovara njegov specifični dijagram, a prema karakterističnim oblicima ovih dijagrama materijali se mogu podeliti na **žilave** i **krte**.

Žilave materijale karakteriše sposobnost većeg izduženja pre kidanja, dok kod krtih materijala kidanje nastaje pri relativno malom izduženju. Krti materijali znatno bolje podnose pritisak nego zatezanje.

4. ODREĐIVANJE IZDUŽENJA ŠTAPOVA (SILA U ŠTAPOVIMA) NA PRIMERU REŠETKASTOG NOSAČA

Rešetkasti nosač prikazan na slici 4. sastoji se od šest štapova od istog materijala i istog poprečnog preseka pri čemu su krajevi štapova spojeni zglavkasto. Čvorove A, B, C, D, napadaju sile F istog intenziteta. Zadatak je odrediti intenzitete sila u štapovima rešetke.



Slika 4. Rešetkasti nosač

REŠENJE

Zglavkasti sistem štapova i opterećenja je simetričan. Ako označimo sa X veličinu sile koja zateže horizontalne štapove, sa Y veličine sila koje pritiskaju vertikalne štapove dok sa Z veličine sila koje pritiskaju kose štapove (štapove po dijagonalama).

Ovaj sistem kako nam je iz statike poznato je jedanput statički neodređen jer je:

$S \neq 2n - 3 \Rightarrow 6 = 2 \cdot 4 - 3 \Rightarrow 6 \neq 5,$

pri čemu je: S – broj štapova; n – broj čvorova.
jer je, broj štapova različit od broja čvorova.
- Za čvor D imamo 2 jednačine za ravnotežu sučeljenih sila, a treću dobijamo iz uslova deformacija štapova pa je:

1.) Prvi uslov: $\sum_{i=0}^{u} Xi = 0$; $X + Z\cos\alpha = 0$;

pri čemu su izduženja - $\varepsilon_x = \dfrac{x}{\Re}$; $\varepsilon_y = \dfrac{Y}{\Re}$; $\varepsilon_z = \dfrac{Z}{\Re}$; a $\Re = E \cdot A$ - krutost.

2.) Drugi uslov: $\sum_{i=1}^{u} Yi = 0$; $-Y - F - Z\sin\alpha = 0$

3.) Traći uslov: $d'^2 = a'^2 + b'^2$.

Kako se rešetka deformiše tada je: $a' = a + \varepsilon_x a$; $b' = b + \varepsilon_y b$; $d' = d + \varepsilon_z d$; pa se dobija jednačina:

$$d'^2 = a'^2 + b'^2$$
$$d^2(1+\varepsilon_z)^2 = a^2(1+\varepsilon_x)^2 + b^2(1+\varepsilon_y)^2 \quad d^2(1+2\varepsilon_z+\varepsilon_z^2) = a^2(1+2\varepsilon_x+\varepsilon_x^2) + b^2(1+2\varepsilon_y+\varepsilon_y^2)$$

$d'^2 \approx d^2(1+2\varepsilon_z) = a^2(1+2\varepsilon_x) + b^2(1+2\varepsilon_y) = a^2 + b^2 + 2(a^2\varepsilon_x + b^2\varepsilon_y)$ odnosno treći uslov je,

$d^2\varepsilon_z = a^2\varepsilon_x + b^2\varepsilon_y$.

Iz geometrijskih uslova naprezanja rešetke dobijaju se sledeći odnosi:

$\dfrac{a}{d} = \cos\alpha$;

$\dfrac{b}{d} = \sin\alpha$;

$\varepsilon_z = \varepsilon_x \cos^2\alpha + \varepsilon_y \sin^2\alpha$;

čime treća jednačina postaje:

$\dfrac{Z}{\Re} = \dfrac{X}{\Re}\cos^2\alpha + \dfrac{Y}{\Re}\sin^2\alpha \rightarrow Z = X\cos^2\alpha + Y\sin^2\alpha$ Sređivanjem predhodnih zavisnosti dobija se sistem od tri jednačina i njihovim međusobnim rešavanjem određuju se sile u štapovima na sledeći način:

1) $X + Z\cos\alpha = 0 \Rightarrow X = -Z\cos\alpha$,

2) $-Y - F - Z\sin\alpha = 0 \Rightarrow Y = -F - Z\sin\alpha$,

3) $X\cos^2\alpha + Y\sin^2\alpha - Z = 0 \Rightarrow Z = X\cos^2\alpha + Y\sin^2\alpha = -Z\cos^3\alpha + (-F - Z\sin\alpha)\sin^2\alpha \Rightarrow$

$$Z = -Z\cos^3\alpha - F\sin^2\alpha - Z\sin^3\alpha \Rightarrow Z + Z\cos^3\alpha + Z\sin^3\alpha = -F\sin^2\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Z(1+\cos^3\alpha+\sin^3\alpha) = -F\sin^2\alpha \Rightarrow Z = \frac{-F\sin^2\alpha}{1+\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}.$$

Kako je određena reakcija Z , onda su ostale dve reakcije,

$$X = \frac{F\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha}{1+\cos^3\alpha+\sin^3\alpha},\ Y = -F\left(1+\frac{\sin^3\alpha}{1+\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}\right).$$

5. ZAKLJUČAK

Usled aksijalne sile F u bilo kom poprečnom preseku štapa javljaju se odgovarajuće sile. Rezultanta unutrašnje sile F_u u bilo kom poprečnom preseku štapa mora biti u ravnoteži sa aksionalnom silom F.

Hukov zakon po njemu, ovaj zakon se naziva i zakon proporcionalnosti, tj. naponi su proporcionalni deformacijama. Koeficijent proporcionalnosti E naziva se **modulom elastičnosti** ili **Jungov modul** i predstavlja fizičku karakteristiku materijala. Vrednost koeficijenata proporcionanosti μ nazivamo Poasonovim koeficijentom i on zavisi od vrste materijala i kreće se u granicama od (0< μ < 0,5).

Dijagram napon – dilatacija (σ , ε), za različite materijale ima različit oblik. Kod nekih materijala oblast razvlačenja ne postoji, kod drugih nema proporcionalnosti između napona i dilatacije, kod trećih prekid materijala nastaje pri vrlo malim izduženjima itd. Znači, svakom materijalu odgovara njegov specifični dijagram, a prema karakterističnim oblicima ovih dijagrama materijali se mogu podeliti na **žilave** i **krte**. Kao primer uzet je zglavkasti sistem štapova i opterećenja je simetričan. Ovaj sistem kako nam je iz statike poznato da je jedanput statički neodređen. Procedura rešavanja ovog sistema, tj. njihovih reakcija je prikazan na kraju rada.

LITERATURA

[1] S. Stamenković, S. Stefanović, B. Cvetanović, Otpornost materijala, Visoka tehnička škola strukovnih studija, Niš, 2009.
[2] S. Stefanović, Otpornost materijala, Visoka škola primenjenih strukovnih studija, Vranje, 2010.
[3] S. Stefanović, i dr., Principi projektovanja tehničkih sistema (knjiga 1), Institut za hidrauliku i pneumatiku, Niš, 2007.
[4] S. Stefanović, N. Šubara, Otpornost materijala – pri projekotvanju mašinskih konstrukcija, TEHDIS, Beograd, 2008.