
INTERPOLATION OF AUDIO SIGNALS WITH SUPERPOSED AWGN USING THIRD AND FIFTH ORDER CONVOLUTION KERNELS - COMPARATIVE ANALYSIS

Nataša Savić

Academy of Applied Technical and Preschool Studies, Niš, Serbia
natasa.savic@akademijanis.edu.rs

Zoran Milivojević

Academy of Applied Technical and Preschool Studies, Niš, Serbia
zoran.milivojevic@akademijanis.edu.rs

Violeta Stojanović

Academy of Applied Technical and Preschool Studies, Niš, Serbia
violeta.stojanovic@akademijanis.edu.rs

Abstract: In the first part of the paper, convolutional interpolation with parametric interpolation kernels is described. After that, one-parameter (1P) convolutional kernels of the third and fifth order are described. In order to test the precision of convolutional interpolation with implemented 1P kernels of the third and fifth order, an experiment was conducted. The experiment is described in the second part of the paper. Interpolation of audio test signals, both musical and sine, was performed. AWGN interference was superimposed on the test signals, in the range of SNR $\in \{-10, -5, 0, 5, 10, 20, 30, 40\}$ dB. Interpolation accuracy was measured using the mean square error (MSE). By minimizing the MSE, the optimal values of the kernel parameter were determined. Experimental results are presented in tables and graphs. At the end, a detailed comparative analysis of the estimation efficiency was performed, between the single-parameter kernel of the third and fifth order.

Keywords: interpolation, convolution, interpolation kernel, optimal parameter.

INTERPOLACIJA AUDIO SIGNALA SA SUPERPONIRANIM AWGN PRIMENOM KONVOLUCIONIH JEZGARA TREĆEG I PETOG REDA – KOMPARATIVNA ANALIZA

Nataša Savić

Akademija tehničko-vaspitačkih strukovnih studija, Niš, Srbija,
natasa.savic@akademijanis.edu.rs

Zoran Milivojević

Akademija tehničko-vaspitačkih strukovnih studija, Niš, Srbija,
zoran.milivojevic@akademijanis.edu.rs

Violeta Stojanović

Akademija tehničko-vaspitačkih strukovnih studija, Niš, Srbija,
violeta.stojanovic@akademijanis.edu.rs

Rezime: U prvom delu rada opisana je konvoluciona interpolacija sa parametarskim interpolacionim jezgrima. Nakon toga opisana su jednoparameterska (1P) konvoluciona jezgra trećeg i petog reda. U cilju testiranja preciznosti konvolucione interpolacije sa implementiranim 1P jezgrima trećeg i petog reda sproveden je eksperiment. Eksperiment je opisan u drugom delu rada. Izvršeno je interpoliranje audio test signala, i to muzičkih i sinusnih. Test signalima su superponirane AWGN smetnje, i to u opsegu SNR $\in \{-10, -5, 0, 5, 10, 20, 30, 40\}$ dB. Pomoću srednje kvadratne greške MSE, merena je preciznost interpolacije. Minimiziranjem MSE, određene su optimalne vrednosti parametra jezgra. Eksperimentalni rezultati su prikazani u tabelama i pomoću grafika. Na kraju izvršena je detaljna komparativna analiza efikasnosti procene, između jednoparametarskog jezgra trećeg i petog reda.

Ključne reči: interpolacija, konvolucija, interpolaciono jezgro, optimalan parametar.

1. UVOD

Kod digitalne obrade signala (*engl.* Digital Signal Processing, DSP) se, u nekim slučajevima (reemplovanje, procene ekstremnih vrednosti, ...), primenjuje algoritam interpolacije (Saeed V. Vaseghi 2000) (Thévenaz et al., 2000) (Lin et al., 2020). Interpolacija je numerički proces izračunavanja vrednosti analiziranog signala između dva

susedna sempla. Za rad u realnom vremenu zahteva se da algoritam interpolacije bude numerički prost i da se izvršava u kratkom, precizno definisanom, vremenskom intervalu. Intenzivno se primenjuje konvoluciona interpolacija (Meijering et al., 2003). Konvoluciona interpolacija se realizuje konvolucijom vremenskog segmenta analiziranog signala sa konvolucionim jezgrom. Teorijska analiza (Park et al., 1982), (Gajalakshmi et al., 2021) pokazuje da je, kod frkventno ograničenih signala, idealna interpolacija kod primene interpolacionog jezgra vremenskog oblika $r(t) = \sin(\pi t) / (\pi t)$. Interpolaciono jezgro ovog oblika naziva se idealno interpolaciono jezgro. Granice ovog jezgra su $(-\infty, \infty)$ i samim tim ovo jezgro nije ostvarljivo. Zbog toga se kod kreiranja fizički ostvarljivih jezgara, a u cilju povećanja brzine realizacije vrši: a) skraćenje jezgra i b) aproksimacija idealnog jezgra prostijim matematičkim funkcijama. Koriste se aproksimacije polinomima. U cilju povećanja brzine interpolacije zahteva se da red polinoma bude $n \leq 7$. Sa povećanjem reda polinoma povećava se kvalitet aproksimacije, ali se povećava vreme izvršenja interpolacije. U naučnoj literaturi su opisana jezgra konačne dužine (Dodgson, 1997), (Keys 1981), (Meijering et al., 1999). Kako bi se jezgra što bolje adaptirala za rešavanje različitih problema uvode se parametarska jezgra (Park et al., 1982), (Milivojević et al., 2022), (Savić et al., 2020) (Savić et al., 2022).

U ovom radu analizira se preciznost interpolacije nad audio i sinusnim test signalima, kojima je superoniran AWGN (*engl.* Additive white Gaussian noise). Konvoluciona interpolacija je realizovana primenom jednoparametarskih (1P) jezgra trećeg i petog reda. Izračunavanjem srednje kvadratne greške interpolacije za različite vrednosti SNR, utvrđena je efikasnost interpolacije, kod audio i sinusnih test signala. Nakon toga izvršena je komparativna analiza preciznosti konvolucione interpolacije jezgara trećeg i petog reda. Minimiziranjem MSE, eksperimentalnim putem određeni su optimalni parametri 1P interpolacionog jezgra trećeg i 1P interpolacionog jezgra petog reda.

Dalja organizacija rada je sledeća. U Sekciji 2 opisana je konvoluciona interpolacija i jezgra trećeg i petog reda. U sekciji 3 opisan je eksperiment. Eksperimentalni rezultati su prikazani u sekciji 4. Analiza rezultata prikazana je u sekciji 5. Sekcija 6 je zaključak.

2. KONVOLUCIONA INTERPOLACIJA

Konvolucija neprekidnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$ definisana je sa:

$$f(x) \otimes g(x) = \int f(t) \cdot g(x-t) dt .$$

(1)

Za diskretne funkcije konvolucija je određena izrazom

$$f(n) \otimes g(n) = \sum_k f(k) \cdot g(n-k) .$$
 (2)

Kod ravnomerno raspoređenih podataka mnoge interpolacione funkcije mogu se zapisati kao:

$$g(x) = \sum_k c_k \cdot r\left(\frac{x-x_k}{h}\right),$$

(3)

gde su c_k parametri koji zavise od semplovanih podataka, h uzorkovani priraštaj, r je interpolaciono jezgro.

2.1. Jednoparametarsko interpolaciono jezgro trećeg reda

Pomoću polinoma trećeg reda na segmentu $[-2,2]$, u radu (Keys 1981) definisano je jednoparametarsko (1P) konvoluciono jezgro trećeg reda, sa:

$$r_3(x) = \begin{cases} (\alpha + 2)|x|^3 - (\alpha + 3)|x|^2 + 1 & , \quad 0 < |x| \leq 1 \\ \alpha|x|^3 - 5\alpha|x|^2 + 8\alpha|x| - 4\alpha & , \quad 1 < |x| \leq 2 , \\ 0 & , \quad |x| > 2 \end{cases}$$
 (4)

gde je α parametar jezgra. Ovo jezgro, u literaturi poznato kao 1P Keysovo jezgro, je dužine $L = 4$.

2.2. Jednoparametarsko interpolaciono jezgro petog reda

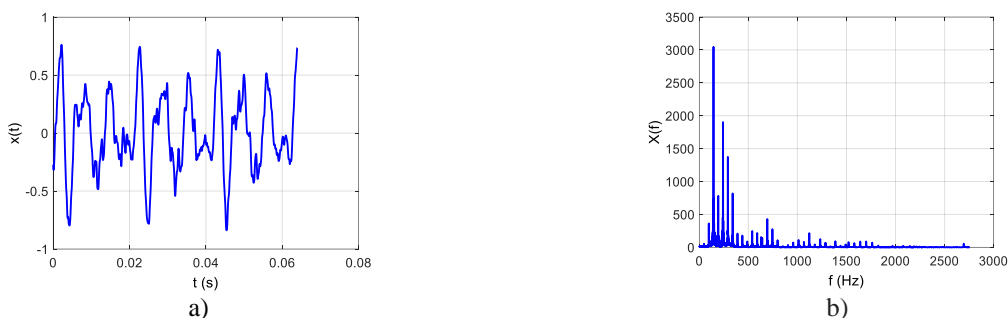
Interpolaciono jezgro petog reda, dužine $L = 6$, definisano pomoću polinoma petog reda, na segmentu $[-3,3]$. 1P jezgro petog reda (Meijering et al., 1999) definisano je sa:

$$r_5(x) = \begin{cases} \left(10\alpha - \frac{21}{16}\right)|x|^5 + \left(-18\alpha + \frac{45}{16}\right)|x|^4 + \left(8\alpha - \frac{5}{2}\right)|x|^2 + 1, & |x| \leq 1 \\ \left(11\alpha - \frac{5}{16}\right)|x|^5 - \left(88\alpha - \frac{45}{16}\right)|x|^4 + (270\alpha - 10)|x|^3 - \left(392\alpha - \frac{35}{2}\right)|x|^2 + (265\alpha - 15)|x| - (66\alpha - 5), & 1 < |x| \leq 2, (5) \\ \alpha|x|^5 - 14\alpha|x|^4 + 78\alpha|x|^3 - 216\alpha|x|^2 + 297\alpha|x| - 162\alpha, & 2 < |x| \leq 3 \\ 0 & |x| > 3 \end{cases}$$

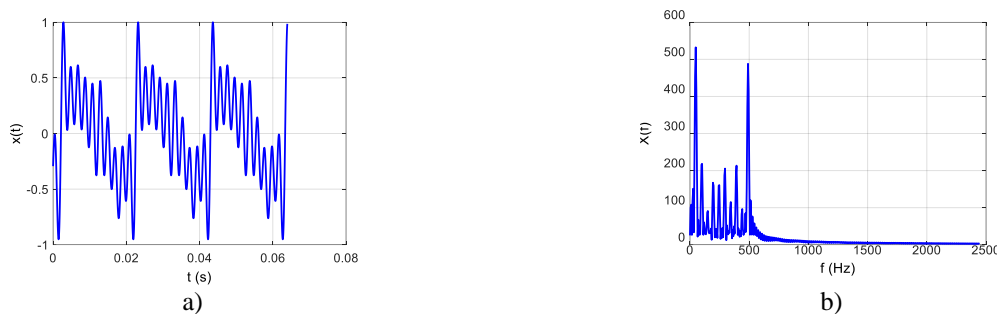
gde je α parametar jezgra.

3. EKSPERIMENT

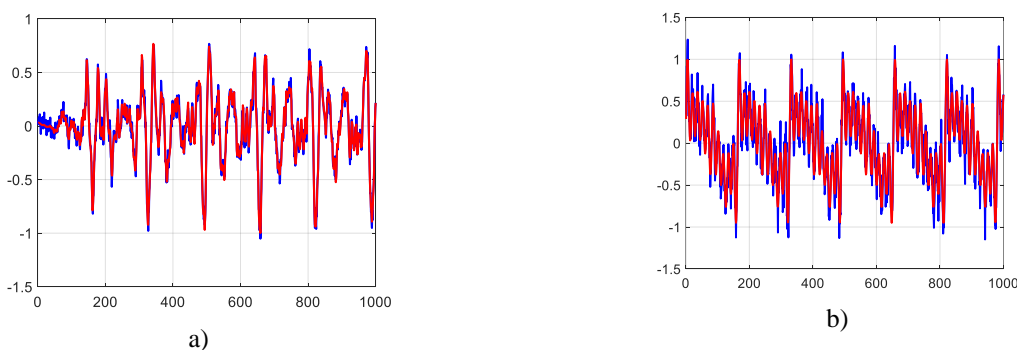
Sproveden je eksperiment u cilju utvrđivanja preciznosti interpolacije primenom interpolacionih jezgara trećeg i petog reda. U tu svrhu korišćeni su audio (tonovi G1 i G6) i sinusni (SinG1 i SinG6) test signali sa superponiranim AWGN. Odnos signal- šum (SNR) pripada skupu $\{-10, -5, 0, 5, 10, 20, 30, 40\}$ dB. Test signali su u formi **wav** fajlova arhivirani na hard disku. Snimanje je obavljeno sa $f_s = 44.1$ kHz i 16 bps. Nakon toga izvršena je interpolacija test signala primenom 1P jezgra trećeg i 1P jezgra petog reda. Izvršena je procena preciznosti interpolacije. Pomoću MSE određena je preciznost interpolacije. Na sl. 1 prikazan je jedan od audio test signala. Na sl.2 prikazan je sinusni test signal, dok su na sl.3 prikazani test signali sa superponiranim AWGN i SNR = 10dB.



Slika. 1. Audio test signal (ton G1, $f_0 = 49$ Hz): a) vremenski i b) spektralni domen



Slika. 2. Sinusni test signal (SinG1, $f_0 = 49$ Hz): a) vremenski i b) spektralni domen



Slika. 3. Test signali sa AWGN, SNR = 10dB: a) audio(ton G1, $f_0 = 49$ Hz i b) sinusni (SinG1, $f_0 = 49$ Hz).

4. EKSPERIMENTALNI REZULTATI

Optimalne vrednosti parametra jezgra i minimalne vrednosti MSE, za razne vrednosti SNR, dobijene interpolacijom test signala primenom 1P jezgra trećeg i petog reda su prikazani u Tbl.1 -T bl.4, kao i na S1.4 - S1.7. Pored toga, u svim tabelama date su i srednje vrednosti optimalnih parametara i minimalnih vrednosti MSE. Nakon toga za svako SNR određena je MSE u funkciji srednje vrednosti optimalnog parametra i na kraju njihova srednja vrednost.

Tabela 1. Optimalni parametri i minimalne vrednosti MSE za jezgro trećeg reda kod audio signala.

SNR	Ton G1			Ton G6		
	α_{opt}	MSE_{min}	$MSE(\overline{\alpha_{opt_G1_3}})$	α_{opt}	MSE_{min}	$MSE(\overline{\alpha_{opt_G6_3}})$
-10	2.0300	0.2430	0.2593	1.6200	0.0994	0.1269
-5	1.9900	0.0772	0.0821	0.9800	0.0357	0.0413
0	1.9000	0.0248	0.0261	-0.0600	0.0139	0.0143
5	1.6300	0.0081	0.0084	-1.0300	0.0057	0.0057
10	1.0500	0.0028	0.0028	-1.5700	0.0026	0.0030
20	-0.2800	$3.6046 \cdot 10^{-4}$	$4.6833 \cdot 10^{-4}$	-1.8500	0.0012	0.0019
30	-0.6400	$7.3172 \cdot 10^{-5}$	$2.3450 \cdot 10^{-4}$	-1.8800	0.0011	0.0018
40	-0.6900	$4.3065 \cdot 10^{-5}$	$2.1097 \cdot 10^{-4}$	-1.8800	0.0011	0.0018
	$\overline{\alpha_{opt_G1_3}}$	$\overline{MSE_{min_G1_3}}$	$\overline{MSE(\alpha_{opt_G1_3})}$	$\overline{\alpha_{opt_G6_3}}$	$\overline{MSE_{min_G6_3}}$	$\overline{MSE(\alpha_{opt_G6_3})}$
	0.8738	0.0445	0.0475	-0.7087	0.0201	0.0246

Tabela 2. Optimalni parametri i minimalne vrednosti MSE za jezgro trećeg reda kod sinusnih signala.

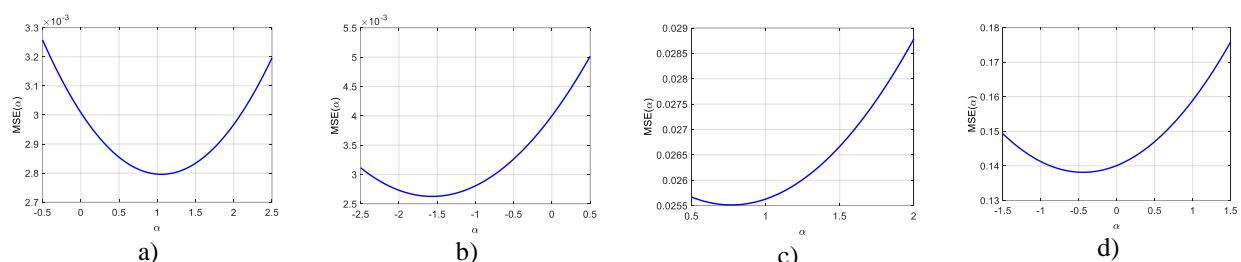
SNR	SinG1			SinG6		
	α_{opt}	MSE_{min}	$MSE(\overline{\alpha_{opt_SinG1_3}})$	α_{opt}	MSE_{min}	$MSE(\overline{\alpha_{opt_SinG6_3}})$
-10	2.0800	2.1776	2.3904	1.8500	1.9984	2.2758
-5	2.0200	0.6935	0.7570	1.4300	0.7398	0.7987
0	1.8600	0.2239	0.2405	0.7000	0.3287	0.3336
5	0.0744	0.0744	0.0772	-0.0300	0.1871	0.1876
10	0.7700	0.0255	0.0255	-0.4400	0.1381	0.1420
20	-0.3200	0.0029	0.0040	-0.6700	0.1171	0.1238
30	-0.5300	$2.9230 \cdot 10^{-4}$	0.0019	-0.6900	0.1153	0.1222
40	-0.5500	$2.9396 \cdot 10^{-5}$	0.0017	-0.6900	0.1152	0.1221
	$\overline{\alpha_{opt_SinG1_3}}$	$\overline{MSE_{min_SinG1_3}}$	$\overline{MSE(\alpha_{opt_SinG1_3})}$	$\overline{\alpha_{opt_SinG6_3}}$	$\overline{MSE_{min_SinG6_3}}$	$\overline{MSE(\alpha_{opt_SinG6_3})}$
	0.6755	0.3998	0.4373	0.1825	0.4675	0.5132

Tabela 3. Optimalni parametri i minimalne vrednosti MSE za jezgro petog reda kod audio signala.

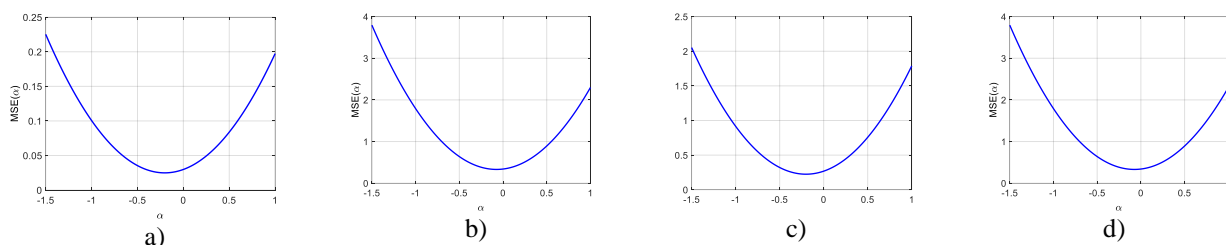
SNR	Ton G1			Ton G6		
	α_{opt}	MSE_{min}	$MSE(\overline{\alpha_{opt_G1_5}})$	α_{opt}	MSE_{min}	$MSE(\overline{\alpha_{opt_G6_5}})$
-10	-0.2200	0.2443	0.2603	-0.1700	0.1000	0.1266
-5	-0.2100	0.0776	0.0825	-0.1100	0.0359	0.0412
0	-0.2000	0.0249	0.0262	0	0.0139	0.0143
5	-0.1800	0.0082	0.0084	0.1000	0.0056	0.0057
10	-0.1200	0.0028	0.0028	0.1500	0.0026	0.0030
20	0.0200	$3.6059 \cdot 10^{-4}$	$4.6085 \cdot 10^{-4}$	0.1800	0.0012	0.0019
30	0.0600	$7.2865 \cdot 10^{-5}$	$2.2614 \cdot 10^{-4}$	0.1800	0.0011	0.0018
40	0.0700	$4.2746 \cdot 10^{-5}$	$2.0253 \cdot 10^{-4}$	0.1900	0.0011	0.0018
	$\overline{\alpha_{opt_G1_5}}$	$\overline{MSE_{min_G1_5}}$	$\overline{MSE(\alpha_{opt_G1_5})}$	$\overline{\alpha_{opt_G6_5}}$	$\overline{MSE_{min_G6_5}}$	$\overline{MSE(\alpha_{opt_G6_5})}$
	-0.0975	0.0448	0.0476	0.0650	0.0202	0.0245

Tabela 4. Optimalni parametri i minimalne vrednosti MSE za jezgro petog reda kod Sinusnih signala.

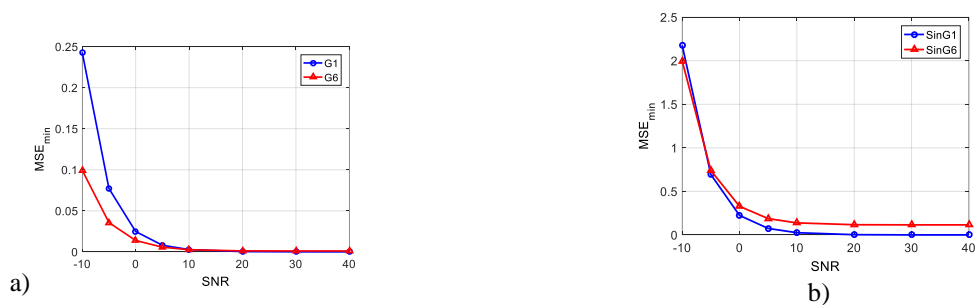
SNR	SinG1			SinG6		
	α_{opt}	MSE_{min}	$MSE(\overline{\alpha_{opt_SinG1_5}})$	α_{opt}	MSE_{min}	$MSE(\overline{\alpha_{opt_SinG6_5}})$
-10	-0.2200	2.1901	2.3501	-0.2000	2.0122	2.2969
-5	-0.2200	0.6970	0.7445	-0.1500	0.7451	0.8050
0	-0.2000	0.2246	0.2367	-0.0700	0.3304	0.3352
5	-0.1600	0.0744	0.0762	0	0.1872	0.1878
10	-0.0900	0.0254	0.0254	0.0400	0.1377	0.1417
20	0.0300	0.0029	0.0043	0.0700	0.1164	0.1233
30	0.0500	$2.9348 \cdot 10^{-4}$	0.0022	0.0700	0.1145	0.1217
40	0.0500	$2.9892 \cdot 10^{-5}$	0.0020	0.0700	0.1144	0.1216
	$\overline{\alpha_{opt_SinG1_5}}$	$\overline{MSE_{min_SinG1_5}}$	$\overline{MSE(\alpha_{opt_SinG1_5})}$	$\overline{\alpha_{opt_SinG6_5}}$	$\overline{MSE_{min_SinG6_5}}$	$\overline{MSE(\alpha_{opt_SinG6_5})}$
	-0.0950	0.4018	0.4302	-0.0212	0.4697	0.5167



Slika 4. Zavisnost MSE od parametra α za SNR = 10, kod test signala za jezgro trećeg reda: a) ton G1 i b) ton G6, c) SinG1 i d) SinG6.



Slika 5. Zavisnost MSE od parametra α za SNR = 0, kod test signale za jezgro petog reda: a) ton G1 i b) ton G6, c) SinG1 i d) SinG6..



Slika 6. Minimalne vrednosti MSE u zavisnosti od SNR za jezgro trećeg reda a) za audio i b) sinusne test signale



Slika. 7. Minimalne vrednosti MSE u zavisnosti od SNR za jezgro petog reda a) za audio i b) sinusne test signale

5. ANALIZA REZULTATA

Analizom eksperimentalnih rezultata prikazanih u prethodnoj sekciji zaključuje se:

a) kod audio test signala (Ton G1) srednja vrednost MSE_{min} kod 1P interpolacionog jezgra petog reda u odnosu na srednju vrednost MSE_{min} kod 1P jezgra trećeg reda je $\overline{MSE_{\min_G1_5}} / \overline{MSE_{\min_G1_3}} = 0.0448 / 0.0445 = 1.007$ i (ton

G6) $\overline{MSE_{\min_G6_5}} / \overline{MSE_{\min_G6_3}} = 0.0202 / 0.0201 = 1.005$ puta veća

b) kod sinusnih test signala (SinG1) $\overline{MSE_{\min_SinG1_5}} / \overline{MSE_{\min_SinG1_3}} = 0.4018 / 0.3998 = 1.005$ i (SinG6)

$\overline{MSE_{\min_SinG6_5}} / \overline{MSE_{\min_SinG6_3}} = 0.4697 / 0.4675 = 1.005$ puta veća.

c) preciznost procene audio signala, veća je u odnosu na preciznost procene sinusnih signala i kod jezgra trećeg i petog reda,

d) Sa povećanjem SNR preciznost interpolacije se povećava, tj. vrednost MSE se smanjuje.

6. ZAKLJUČAK

S obzirom na komparativnu analizu preciznosti interpolacije kod audio signala sa superponiranim AWGN primenom 1P interpolacionog jezgra trećeg i petog reda, zaključuje se da je jezgro trećeg reda pokazalo je neznatno veću preciznost u odnosu na jezgro petog reda. Imajući u vidu i manju numeričku složenost u odnosu na jezgro petog reda preporuka je za rad u realnom vremenu implementacija jezgra trećeg reda.

REFERENCES

- Dodgson, N. (1997) Quadratic Interpolation for Image Resampling, *IEEE Transactions On Image Processing*, 6 (9), 1322–1326.
- Gajalakshmi, N., & Karunanithi, S. (2021) Cubic Convolution and Osculatory Interpolation for Image Analysis", *International Journal of Creative Research Thoughts (IJCRT)*, 9(12), 836–841.
- Keys, R. (1981) Cubic convolution interpolation for digital image processing, *IEEE Trans. Acout. Speech, & Signal Processing*, vol. ASSP-29, 1153-1160.
- Lin, S., Chuang, K., & Chen, J. (2020) Efficient Implementation of Cubic Spline Interpolator, *IEEE RWS*, 287-290.
- Meijering, E., & Unser, M. (2003) A Note on Cubic Convolution Interpolation, *IEEE Trans. on Image Processing*, 12 (4), 447-479.
- Meijering, E., Zuiderveld, K., & Viergever, M. (1999) Image Reconstruction by Convolution with Symmetrical Piecewise nth-Order Polynomial Kernels, *IEEE Transactions on Image Processing*, 8(2), 192-201.
- Milivojević, Z., Savić, N., & Prlinčević, B. (2022) Spectral characteristics of two parameter fifth degree polynomial convolution kernel, *Bulletin of Natural Sciences Research*, 12(1), 15-20.
- Park, K. S., & Schowengerdt, R. A. (1982) Image reconstruction by parametric cubic convolution, *Computer Vision, Graphics & Image Processing*, 23, 258-272.
- Saeed V. (2000) *Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction*, Second Edition. John Wiley & Sons Ltd.
- Savić, N., Milivojević, Z., Prlinčević, B., & Kostić, D. (2022). Septic-convolution Kernel - Comparative Analysis of the Interpolation Error, 16th International Conference on DAS, Suceava, Romania.
- Savić, N., & Milivojević, Z. (2020). Optimization of the 3P Keys Kernel Parameters for Interpolation of Audio Signals, *International Scientific Conference UNITECH'20*, (pp. 200 – 205), Gabrovo, Bulgaria.
- Savić, N., Milivojević, Z., & Veličković, Z. (2022). Optimization of the 3P Keys kernel parameters by minimizing the ripple of the spectral characteristic, *FACTA UNIVERSITATIS*, 35(2), 283-300.
- Thévenaz, P., Blu, T., & Unser, M. (2000): Interpolation revisited. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 19, no. 7, pp. 739-758.